

فصل ۱

رویه‌ها در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$

مقدمه

هدف این فصل مطالعه هندسه موضعی و تا حدی سراسری رویه‌ها در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ با استفاده از ابزارهای ریاضی تحلیلی و دیفرانسیل هندسه است. رویه‌ها را به صورت توابع پارامتری معرفی می‌کنیم، سپس مفهوم رویه منظم، صفحه مماس، بردار نرمال، فرم بنیادی اول و دوم، انحنای گاوسی و میانگین و خواص ذاتی را بررسی می‌کنیم. در ادامه، قضیه اگره‌گیم گاوس و قضیه بنیادی رویه‌ها را به صورت کیفی بیان کرده و مثال‌هایی از رویه‌های خط‌انداز و مینیمال (از جمله هلیکوپید و کاتنوید) را معرفی می‌کنیم. در طول فصل، تمرکز بر مثال‌های کلاسیک (کره، استوانه، مخروط، سطح گرافیک) و تمرین‌هایی است که هم برای فهم مفهومی مناسب‌اند و هم قابلیت استفاده در آزمون‌های میان‌ترم و پایان‌ترم را دارند.

۱.۱ رویه پارامتری و وصله مختصات

ایده‌ی اصلی این است که یک «رویه» را به صورت تصویر یک ناحیه‌ی باز در $\mathbb{R}^2$ تحت نگاشتی هموار به $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیریم.

تعریف ۱.۱ (رویه پارامتری). گویی $U \subset \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای باز و $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ نگاشتی با همواری کلاس C^k (معمولاً $k \geq 2$) باشد. آنگاه X را یک رویه پارامتری یا وصله مختصات (coordinate patch) می‌نامیم. برای $(u, v) \in U$ ، نوشتن

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

متداول است.

تعریف ۲.۱. مشتقات جزئی اول X نسبت به u و v را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_u(u, v) = \frac{\partial X}{\partial u}(u, v), \quad X_v(u, v) = \frac{\partial X}{\partial v}(u, v).$$

مثال ۳.۱ (صفحه). صفحه

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$$

را می‌توان با پارامترسازی

$$X(u, v) = (u, v, 1), \quad U = \mathbb{R}^2$$

نوشت. در این صورت

$$X_u = (1, 0, 0), \quad X_v = (0, 1, 0).$$

مثال ۴.۱ (کره واحد). کره واحد

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

را می‌توان در ناحیه‌ی بدون قطب‌ها با مختصات کروی پارامتری کرد:

$$X(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u),$$

که در آن $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ زاویه عرض و $v \in (0, 2\pi)$ زاویه طول جغرافیایی است.

۱.۱.۱ انواع سطوح کلاسیک در $\mathbb{R}^3$

در بسیاری از کاربردها، با چند خانواده‌ی مهم از رویه‌ها زیاد مواجه می‌شویم.

مثال ۵.۱ (سطح گراف یک تابع). اگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد، سطح گراف آن با پارامترسازی

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$$

به‌دست می‌آید. این نوع رویه‌ها در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و در آنالیز عددی بسیار مهم‌اند.

مثال ۶.۱ (سطح چرخشی). اگر $c(u) = (r(u), 0, z(u))$ خم همواری در صفحه‌ی xz باشد و حول محور z دوران داده شود، سطح حاصل سطح چرخشی است:

$$X(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, z(u)), \quad v \in [0, 2\pi).$$

کره، استوانه و کاتنویید مثال‌هایی از سطوح چرخشی‌اند.

مثال ۷.۱ (سطح استوانه‌ای). اگر $c(u)$ خم همواری در صفحه‌ای باشد و در جهت یک بردار ثابت $a \in \mathbb{R}^3$ منتقل شود، سطح حاصل

$$X(u, v) = c(u) + v a$$

را سطح استوانه‌ای می‌نامند. استوانه‌ی دایره‌ای نمونه‌ی مهمی از این سطوح است.

نکته ۸.۱. بسیاری از سطوح مهندسی (مخازن، لوله‌ها، قطعات سازه‌ای) ترکیبی از سطوح چرخشی و استوانه‌ای‌اند. شناخت فرم‌های بنیادی این سطوح، پایه‌ی تحلیل تنش و کرنش روی پوسته‌ها است.

۲.۱ رویه منظم

برای اینکه یک پارامترسازی واقعاً یک رویه دوبعدی «خوب» در $\mathbb{R}^3$ توصیف کند، باید مشتقات جزئی آن مستقل خطی باشند.

تعریف ۹.۱ (رویه منظم در یک نقطه). گویی $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک رویه پارامتری باشد و $(u_0, v_0) \in U$ می‌گوییم X در (u_0, v_0) منظم است اگر بردارهای

$$X_u(u_0, v_0), \quad X_v(u_0, v_0)$$

مستقل خطی باشند. به‌طور معادل

$$X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0.$$

اگر X در تمام نقاط U منظم باشد، آن را یک رویه منظم می‌نامیم.

مثال ۱۰.۱. برای صفحه $X(u, v) = (u, v, 1)$ ، بردارهای

$$X_u = (1, 0, 0), \quad X_v = (0, 1, 0)$$

در همه جا مستقل خطی اند، پس این پارامترسازی منظم است.

مثال ۱۱.۱ (کره). در مثال کره واحد، محاسبه مشتقات و ضرب خارجی نشان می دهد که

$$X_u(u, v) \times X_v(u, v) \neq 0$$

برای همه (u, v) در دامنه پارامترسازی (به جز نقاطی که از دامنه حذف شده اند، مانند قطب ها در یک وصله ی خاص). بنابراین پارامترسازی رویه ای منظم است.

مثال ۱۲.۱ (مخروط). پارامترسازی مخروط راست را در نظر بگیرید:

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), \quad u > 0, v \in (0, 2\pi).$$

در تمام نقاط با $u > 0$ پارامترسازی منظم است، اما در $u = 0$ (نوک مخروط) مشتقات جزئی مستقل خطی نیستند و رویه در آن نقطه منظم نیست.

۳.۱ تعریف انتزاعی رویه

در این درس تمرکز ما روی رویه های تعبیه شده در $\mathbb{R}^3$ است؛ ولی از نظر مفهوم، می توان رویه را به صورت زیر نیز تعریف کرد.

تعریف ۱۳.۱ (رویه به عنوان خمینه دوبعدی). یک رویه (یا خمینه دوبعدی) یک فضای توپولوژیک S است به طوری که هر نقطه ی $p \in S$ دارای همسایگی ای است که با نقشه ی مختصات

$$\varphi : V \subset S \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

به ناحیه ای باز از $\mathbb{R}^2$ همئومورف است و تبدیلات مختصات بین نقشه ها هموارند. در صورت وجود ساختار دیفرانسیلی سازگار، S را یک مانفولد دوبعدی هموار می نامیم.

در این فصل، هر جا از «رویه» سخن می گوئیم، منظور یک رویه منظم تعبیه شده در $\mathbb{R}^3$ است.

۴.۱ تغییر پارامتر و نگاشت های دیفرانسیل پذیر

برای توصیف یک رویه، ممکن است پارامترسازی های متفاوتی داشته باشیم که همان روی تصویر را تولید می کنند. این پارامترسازی ها با تغییر مختصات به هم مرتبط اند.

تعریف ۱۴.۱ (پارامترسازی های معادل). گویی $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ و $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ دو پارامترسازی منظم باشند. می گوئیم این دو معادل هستند اگر نگاشتی هموار و معکوس پذیر

$$\phi : \tilde{U} \rightarrow U$$

وجود داشته باشد به طوری که

$$\tilde{X} = X \circ \phi.$$

در این صورت ϕ یک تغییر پارامتر یا تبدیل مختصات نامیده می شود.

قضیه ۱۵.۱. اگر $X : U \rightarrow S$ و $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow S$ دو پارامترسازی منظم باشند که رویه‌ی یکسان S را توصیف می‌کنند، آنگاه نقشه‌ی انتقال مختصات

$$\phi = X^{-1} \circ \tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow U$$

یک دیفیئومورفیسم کلاس C^k است و دترمینان ژاکوبی آن در هیچ نقطه‌ای صفر نیست.

نکته ۱۶.۱. این قضیه توجیه می‌کند که ساختار دیفرانسیلی روی رویه مستقل از انتخاب پارامترسازی محلی است؛ پارامترهای u, v فقط مختصات محلی‌اند.

۵.۱ صفحه مماس، بردار نرمال و دیفرانسیل نگاشت

تعریف ۱۷.۱ (فضای مماس). گویی $S \subset \mathbb{R}^3$ رویه‌ای منظم باشد و $p \in S$. یک بردار مماس در p ، مشتق یک خم هموار $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ در p است که $\alpha(0) = p$. مجموعه‌ی تمام این بردارها یک فضای خطی دوبعدی را تشکیل می‌دهد که فضای مماس $T_p S$ نامیده می‌شود.

اگر $X : U \rightarrow S$ یک پارامترسازی باشد و $p = X(u_0, v_0)$ ، آنگاه

$$T_p S = \text{span}\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\}.$$

تعریف ۱۸.۱ (بردار نرمال واحد). گویی S رویه‌ای منظم باشد. برای هر $p \in S$ ، فضای عمود بر $T_p S$ یک بعدی است. یک بردار نرمال واحد در p بردار واحدی است که بر $T_p S$ عمود باشد. در صورت داشتن پارامترسازی X و مشتقات X_u, X_v ، می‌توان نوشت

$$N(p) = \frac{X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)}{\|X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)\|}.$$

مثال ۱۹.۱ (صفحه). برای صفحه $X(u, v) = (u, v, 1)$ داریم

$$X_u = (1, 0, 0), \quad X_v = (0, 1, 0),$$

پس

$$N = (0, 0, 1)$$

یک نرمال واحد ثابت است.

مثال ۲۰.۱ (کره). برای کره واحد، اگر $p \in S^2$ ، آنگاه

$$N(p) = p$$

یک میدان نرمال واحد است (جهت‌گیری بیرونی).

تعریف ۲۱.۱ (دیفرانسیل نگاشت بین رویه‌ها). گویی $f : S_1 \rightarrow S_2$ نگاشتی هموار بین دو رویه باشد و $p \in S_1$. دیفرانسیل f در p نگاشت خطی

$$df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

است که بر هر بردار مماس $v = \alpha'(0)$ (برای یک خم α با $\alpha(0) = p$) به صورت

$$df_p(v) = (f \circ \alpha)'(0)$$

اعمال می‌شود.

۶.۱ فرم بنیادی اول

فرم بنیادی اول متریک القاشده روی رویه از $\mathbb{R}^3$ را توصیف می‌کند و اطلاعاتی درباره طول‌ها و زاویه‌ها روی رویه فراهم می‌آورد.

تعریف ۲۲.۱ (فرم بنیادی اول). گویی $X : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ پارامترسازی منظم باشد. در هر نقطه‌ی $(u, v) \in U$ ضرایب

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle$$

تعریف می‌شوند. پس فرم دوخطی

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

را فرم بنیادی اول می‌نامیم. ماتریس متناظر با I در پایه‌ی $\{X_u, X_v\}$ برابر است با

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

گزاره ۲۳.۱ (طول خم روی رویه). گویی $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ خم همواری باشد که به صورت $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ نوشته می‌شود. آنگاه طول خم

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt$$

بر حسب فرم بنیادی اول برابر است با

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E u'(t)^2 + 2F u'(t)v'(t) + G v'(t)^2} dt.$$

مثال ۲۴.۱ (کره واحد). در پارامترسازی کروی، محاسبه نشان می‌دهد

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \cos^2 u.$$

پس فرم بنیادی اول:

$$I = du^2 + \cos^2 u dv^2.$$

مثال ۲۵.۱ (استوانه واحد). برای استوانه واحد

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

داریم

$$X_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad X_v = (0, 0, 1),$$

و لذا

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

بنابراین

$$I = du^2 + dv^2.$$

تمرین‌های تکمیلی فرم بنیادی اول

تمرین ۲۶.۱ (★). برای گراف تابع $z = f(x, y)$ با پارامترسازی $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$:

۱. نشان دهید $X_u = (1, 0, f_u)$ و $X_v = (0, 1, f_v)$.

۲. ضرایب فرم بنیادی اول را پیدا کنید و تکراراً بررسی کنید که

$$I = (1 + f_u^2) du^2 + 2f_u f_v du dv + (1 + f_v^2) dv^2.$$

تمرین ۲۷.۱ (★★). سطح چرخشی

$$X(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, z(u))$$

را در نظر بگیرید.

۱. X_u و X_v را محاسبه کنید.

۲. نشان دهید فرم بنیادی اول به صورت

$$I = (r'(u)^2 + z'(u)^2) du^2 + r(u)^2 dv^2$$

است، یعنی $F = 0$ است.

۳. تفسیر هندسی $r(u)$ و $\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}$ را توضیح دهید.

تمرین ۲۸.۱ (★★). برای هلیکویید

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u),$$

فرم بنیادی اول را محاسبه کنید و ماتریس متریک را به دست آورید. بررسی کنید آیا (u, v) دستگاه مختصات همسان‌زاویه (isothermal) هستند یا خیر.

۷.۱ مساحت رویه و انتگرال سطحی

تعریف ۲۹.۱ (عنصر مساحت). با نمادگذاری بخش قبل، عنصر مساحت رویه به صورت

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

تعریف می‌شود.

گزاره ۳۰.۱ (مساحت رویه). گویی $S = X(U)$ رویه‌ای منظم باشد. مساحت S برابر است با

$$\text{Area}(S) = \int_U \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

مثال ۳۱.۱ (مساحت نیم‌کره). برای نیم‌کره‌ی بالایی کره واحد، با دامنه $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ، $v \in [0, 2\pi]$ و

$$I = du^2 + \cos^2 u dv^2,$$

عنصر مساحت:

$$dA = \sqrt{1 \cdot \cos^2 u - 0} du dv = \cos u du dv.$$

پس

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos u du dv = 2\pi.$$

مثال ۳۲.۱ (مساحت یک بخش از استوانه). برای استوانه واحد با $u \in [0, 2\pi]$ و $v \in [a, b]$,

$$dA = \sqrt{1 \cdot 1 - 0} du dv = du dv,$$

و در نتیجه

$$\text{Area} = \int_a^b \int_0^{2\pi} du dv = 2\pi(b-a).$$

تمرین ۳۳.۱. مساحت کره واحد را با استفاده از فرمول مساحت و پارامترسازی کروی محاسبه کنید. (راهنما: کره به صورت دو نیم‌کره پوشش داده می‌شود.)

مثال‌های بیشتر از مساحت سطوح

مثال ۳۴.۱ (مساحت یک بخش از کره در محدوده‌ی طول و عرض). برای کره‌ی واحد، ناحیه‌ای را در نظر بگیرید که با شرایط $u \in [\alpha, \beta]$ و $v \in [\gamma, \delta]$ در پارامترهای کروی مشخص می‌شود. نشان دهید مساحت این ناحیه برابر است با

$$\text{Area} = \int_{\gamma}^{\delta} \int_{\alpha}^{\beta} \cos u du dv = (\delta - \gamma)(\sin \beta - \sin \alpha).$$

این فرمول در ژئودزی جغرافیایی برای محاسبه‌ی مساحت مناطق روی کره کاربرد دارد.

مثال ۳۵.۱ (مساحت بخشی از سطح گراف). برای گراف $z = f(x, y)$ روی ناحیه‌ی $D \subset \mathbb{R}^2$ ، عنصر مساحت

$$dA = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

است. در نتیجه مساحت گراف روی D برابر است با

$$\text{Area} = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

این فرمول در محاسبه‌ی سطح تماس در مدل‌سازی‌های فیزیکی (مثلاً سطح مایع در یک ظرف) به کار می‌رود.

تمرین ۳۶.۱ (★★). مساحت گراف تابع $z = x^2 + y^2$ را روی دیسک واحد $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ محاسبه کنید. (راهنما: از مختصات قطبی استفاده کنید.)

۸.۱ خم‌ها روی رویه و طول ژئودزیکی (دیدگاه متریکی)

گویی $S \subset \mathbb{R}^3$ رویه‌ای منظم با فرم بنیادی اول

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

باشد. اگر خم

$$\alpha : [a, b] \rightarrow S, \quad \alpha(t) = X(u(t), v(t))$$

روی S قرار داشته باشد، طول آن بر اساس متریک القاشده (بدون استفاده‌ی مستقیم از $\mathbb{R}^3$) برابر است با

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E u'(t)^2 + 2F u'(t)v'(t) + G v'(t)^2} dt.$$

نکته ۳۷.۱. این فرمول نشان می‌دهد که برای اندازه‌گیری طول خم‌ها، فقط فرم بنیادی اول کافی است و به تعبیه‌ی رویه در $\mathbb{R}^3$ نیازی نیست؛ این نکته پایه‌ی مفهوم «خواص ذاتی» است.

مثال ۳۸.۱ (خم دایره‌ای افقی روی استوانه). روی استوانه‌ی واحد $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ خم

$$\alpha(t) = X(t, v) = (\cos t, \sin t, v)$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید طول این خم در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر با 2π است. با استفاده از فرم بنیادی اول

$$I = du^2 + dv^2$$

این محاسبه را فقط در دستگاه (u, v) انجام دهید.

تمرین ۳۹.۱ (★). برای خم

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t))$$

روی کره‌ی واحد با فرم

$$I = du^2 + \cos^2 u \, dv^2$$

نشان دهید طول خم فقط به u, v و مشتقات آن‌ها بستگی دارد و شکل تعبیه‌ی کره در $\mathbb{R}^3$ دخالتی ندارد.

۹.۱ جهت‌پذیری و رویه‌های فشرده جهت‌پذیر

تعریف ۴۰.۱ (میدان نرمال واحد). گویی $S \subset \mathbb{R}^3$ یک رویه منظم باشد. یک میدان نرمال واحد نگاشتی هموار

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

است به‌طوری که برای هر $p \in S$ بردار $N(p)$ بر $T_p S$ عمود و واحد باشد.

تعریف ۴۱.۱ (جهت‌پذیری). رویه‌ی منظم S را جهت‌پذیر می‌نامیم اگر میدان نرمال واحد هموار سراسری $N : S \rightarrow S^2$ روی آن وجود داشته باشد. در این صورت دو جهت‌گیری ممکن (مطابق N و $-N$) داریم.

مثال ۴۲.۱. کره واحد S^2 و استوانه‌ی واحد، رویه‌هایی جهت‌پذیرند. برای کره، $N(p) = p$ و برای استوانه

$$N(\cos u, \sin u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$$

انتخاب‌های طبیعی‌اند.

مثال ۴۳.۱ (نوار موبیوس). نوار موبیوس زیرمجموعه‌ای غیرجهت‌پذیر از $\mathbb{R}^3$ است، زیرا نمی‌توان میدان نرمال واحد هموار سراسری روی آن تعریف کرد؛ با یک دور حرکت روی نوار، جهت نرمال تغییر علامت می‌دهد.

قضیه ۴۴.۱. اگر S رویه‌ای منظم و متصل در $\mathbb{R}^3$ باشد، آنگاه یا جهت‌پذیر است (و دقیقاً دو جهت‌گیری دارد)، یا اصلاً جهت‌پذیر نیست.

تعریف ۴۵.۱ (رویه فشرده جهت‌پذیر). رویه S را فشرده می‌نامیم اگر به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ بسته و کراندار باشد. اگر علاوه بر این جهت‌پذیر نیز باشد، به آن رویه فشرده جهت‌پذیر می‌گوییم.

تمرین‌های تکمیلی جهت‌پذیری و نگاشت گاوس

تمرین ۴۶.۱ (★★). برای استوانه‌ی واحد با جهت‌گیری بیرونی، نگاشت گاوس را به‌طور صریح بنویسید و تصویر آن را در S^2 توصیف کنید. (راهنما: تصویر یک دایره‌ی استوایی است.)

تمرین ۴۷.۱ (★★★). نوار موبیوس را به‌صورت زیر در $\mathbb{R}^3$ پارامترسازی کنید:

$$X(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v}{\pi} \cos \frac{u}{\pi}\right) \cos u, \left(1 + \frac{v}{\pi} \cos \frac{u}{\pi}\right) \sin u, \frac{v}{\pi} \sin \frac{u}{\pi} \right),$$

که در آن $u \in [0, 2\pi]$ و $v \in [-1, 1]$.

۱. نشان دهید این پارامترسازی در هر نقطه‌ای منظم است.

۲. استدلال کنید که نمی‌توان میدان نرمال واحد هموار سراسری روی این سطح تعریف کرد.

۱۰.۱ نگاشت گاوس

تعریف ۴۸.۱ (نگاشت گاوس). اگر S رویه‌ای جهت‌پذیر با میدان نرمال واحد هموار $N : S \rightarrow S^2$ باشد، نگاشت گاوس همان تابع

$$N : S \rightarrow S^2, \quad p \mapsto N(p)$$

است که هر نقطه‌ی رویه را به بردار نرمال واحدش ارسال می‌کند.

مثال ۴۹.۱. روی کره واحد با جهت‌گیری بیرونی، نگاشت گاوس همانی است: $N(p) = p$. روی صفحه، نگاشت گاوس ثابت است.

تعریف ۵۰.۱ (دیفرانسیل نگاشت گاوس). در هر $p \in S$ ، دیفرانسیل نگاشت گاوس

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$$

یک نگاشت خطی است که تغییرات میدان نرمال را در جهت‌های مماس اندازه می‌گیرد.

۱۱.۱ فرم بنیادی دوم و شکل عمل

تعریف ۵۱.۱ (شکل عمل). اگر S رویه‌ای جهت‌پذیر با میدان نرمال واحد N باشد، برای هر $p \in S$ نگاشت خطی

$$S_p : T_p S \rightarrow T_p S, \quad S_p(v) = -dN_p(v)$$

شکل عمل یا نگاشت وینگارتن نامیده می‌شود.

تعریف ۵۲.۱ (فرم بنیادی دوم). فرم دوخطی

$$\Pi_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Pi_p(u, v) = \langle S_p(u), v \rangle = -\langle dN_p(u), v \rangle$$

فرم بنیادی دوم در p است.

در مختصات (u, v) و پارامترسازی X ، ضرایب فرم بنیادی دوم را با

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle, \quad f = \langle X_{uv}, N \rangle, \quad g = \langle X_{vv}, N \rangle$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$II = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

و ماتریس آن در پایه‌ی $\{X_u, X_v\}$ برابر با

$$II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

قضیه ۵۳.۱. با نمادگذاری بالا، شکل عمل S_p در پایه‌ی $\{X_u, X_v\}$ توسط رابطه‌ی

$$[S_p] = I^{-1} II$$

بیان می‌شود.

مثال ۵۴.۱ (کره واحد). برای کره واحد، $N(p) = p$ و لذا $dN_p = \text{Id}$ ، پس $S_p = -\text{Id}$. از طرفی می‌توان نشان داد

$$II = I,$$

یعنی فرم‌های بنیادی اول و دوم (با جهت‌گیری مناسب) یکسان‌اند.

تمرین‌های تکمیلی انحنای

تمرین ۵۵.۱ (★★). برای استوانه‌ی واحد $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$:

۱. بردار نرمال واحد N را پیدا کنید.

۲. ضرایب e, f, g فرم بنیادی دوم را محاسبه کنید.

۳. نشان دهید $K = 0$ و $H = \frac{1}{p}$ (با جهت‌گیری مناسب).

تمرین ۵۶.۱ (★★★). برای سطح گراف $z = f(x, y)$ با پارامترسازی $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ و فرض f هموار:

۱. نرمال واحد N را بر حسب f_u, f_v محاسبه کنید.

۲. ضرایب فرم بنیادی دوم e, f, g را بر حسب مشتقات مرتبه‌ی دوم f بنویسید.

۳. فرمول K را به شکل

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

استخراج کنید.

۱۲.۱ انحناهای گاوسی و میانگین

تعریف ۵۷.۱ (انحناهای اصلی، انحناهای گاوسی و میانگین). در هر $p \in S$ ، شکل عمل $S_p : T_p S \rightarrow T_p S$ یک عملگر خودالحاق نسبت به متریک I است، لذا دو مقدار ویژه حقیقی $k_1(p), k_2(p)$ دارد که انحناهای اصلی هستند.

انحناهای گاوسی در p :

$$K(p) = k_1(p) k_2(p),$$

و انحناهای میانگین در p :

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

قضیه ۵۸.۱ (فرمول‌های مختصاتی برای K و H). با نمادگذاری E, F, G, e, f, g داریم:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

مثال ۵۹.۱ (کره واحد). برای کره واحد، $S_p = -\text{Id}$ و لذا $k_1 = k_2 = -1$. پس

$$K = (-1) \cdot (-1) = 1, \quad H = \frac{-1 - 1}{2} = -1.$$

تغییر جهت‌گیری علامت H را عوض می‌کند، ولی K را تغییر نمی‌دهد.

مثال ۶۰.۱ (صفحه). برای صفحه، N ثابت است، پس $dN_p = 0$ و $S_p = 0$. در نتیجه

$$k_1 = k_2 = 0, \quad K = 0, \quad H = 0.$$

مثال ۶۱.۱ (استوانه واحد). استوانه واحد «از پهلوی» خمیده و در امتداد محور صاف است؛ یکی از انحناهای اصلی صفر و دیگری غیرصفر است، لذا

$$K = 0, \quad H \neq 0.$$

۱۳.۱ خواص ذاتی و قضیه اگره گیم گاوس

یک کمیت هندسی را ذاتی می‌نامیم اگر فقط به متریک رویه (فرم بنیادی اول) بستگی داشته باشد، نه به نحوه تعبیه رویه در فضای محیطی.

قضیه ۶۲.۱ (قضیه اگره گیم گاوس - بیان کیفی). گویی $S \subset \mathbb{R}^3$ یک رویه منظم با فرم بنیادی اول

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

باشد. آنگاه انحناهای گاوسی K را می‌توان صرفاً برحسب E, F, G و مشتقات جزئی آن‌ها تا مرتبه دوم بیان کرد؛ یعنی K یک تابع ذاتی متریک است.

به‌ویژه، اگر دو رویه S و S' با متریک‌های القاشده‌شان هم‌طول (ایزومتري) باشند، آنگاه انحناهای گاوسی در نقاط متناظر برابر است.

نتیجه ۶۳.۱. چون کره واحد در هر نقطه $K = 1$ و صفحه در هر نقطه $K = 0$ دارد، هیچ نگاشت هم‌طولی بین بازه‌های باز کره و صفحه وجود ندارد. بنابراین نمی‌توان سطح یک کره را بدون کشش روی صفحه پهن کرد.

تمرین ۶۴.۱. به صورت کیفی توضیح دهید چرا هر رویه‌ای با $K \equiv 0$ ، محلی با صفحه‌ای اقلیدسی هم‌طول است. (اشاره: به قضیه اگره گیم استناد کنید.)

۱۴.۱ معادلات سازگاری و قضیه بنیادی رویه‌ها

فرم بنیادی اول و دوم مستقل از هم نیستند. سازگاری بین آن‌ها با معادلات گاوس و کداتسی-مایناردی بیان می‌شود.

تعریف ۶۵.۱ (معادلات گاوس-کداتسی (به‌طور شهودی)). در یک دستگاه مختصات (u, v) ، ضرایب E, F, G, e, f, g باید مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی (معادلات گاوس-کداتسی) را ارضا کنند تا از یک رویه‌ی واقعی در $\mathbb{R}^3$ ناشی شوند. این معادلات سازگاری بین مشتقات E, F, G و e, f, g را بیان می‌کنند.

قضیه ۶۶.۱ (قضیه بنیادی رویه‌ها). گویی روی ناحیه‌ی باز $U \subset \mathbb{R}^2$ دو فرم دوخطی متقارن

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad II = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

با ضرایب هموار داده شده باشند، به‌طوری‌که:

- متریک I مثبت‌معین باشد ($EG - F^2 > 0$ در همه‌ی نقاط)،
- ضرایب E, F, G, e, f, g معادلات گاوس-کداتسی را ارضا کنند.

آنگاه:

(الف) **وجود:** رویه‌ای $S \subset \mathbb{R}^3$ و پارامترسازی منظم $X : U \rightarrow S$ وجود دارد که فرم‌های بنیادی اول و دوم آن دقیقاً I و II باشند.

(ب) **یکتایی تا حرکت صلب:** اگر $X_1, X_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ دو پارامترسازی با همان فرم‌های بنیادی باشند، آنگاه یک حرکت صلب (ترکیبی از دوران و انتقال) $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$X_2 = A \circ X_1.$$

۱۵.۱ رویه‌های خط‌انداز

تعریف ۶۷.۱ (رویه خط‌انداز). رویه‌ای $S \subset \mathbb{R}^3$ را خط‌انداز می‌نامیم اگر بتوان آن را به صورت اجتماع یک خانواده از خط‌های راست نوشت. به طور دقیق‌تر، اگر نگاشت

$$X(u, v) = c(u) + v d(u)$$

با c, d منحنی‌های هموار در $\mathbb{R}^3$ وجود داشته باشد که X رویه‌ای منظم تولید کند، آنگاه $S = X(U)$ یک رویه خط‌انداز است.

مثال ۶۸.۱ (استوانه و مخروط). • استوانه واحد:

$$c(u) = (\cos u, \sin u, 0), \quad d(u) = (0, 0, 1),$$

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

• مخروط:

$$c(u) = 0, \quad d(u) = (\cos u, \sin u, 1), \quad X(t, u) = t d(u).$$

مثال ۶۹.۱ (هلیکوئید). هلیکوئید

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$$

یک رویه خط‌انداز کلاسیک است؛ برای هر مقدار ثابت u ، نگاشت $v \mapsto X(u, v)$ یک خط راست است.

قضیه ۷۰.۱. برای رویه‌های خط‌انداز منظم، انحنا ی گوسی K در هر نقطه‌ای که سطح واقعاً خط‌انداز است، نامثبت است:

$$K \leq 0.$$

۱۶.۱ رویه‌های مینیمال

تعریف ۷۱.۱ (رویه مینیمال). رویه‌ی منظم $S \subset \mathbb{R}^3$ مینیمال نامیده می‌شود اگر انحنا ی میانگین آن در همه‌ی نقاط صفر باشد:

$$H(p) = 0 \quad \forall p \in S.$$

مثال ۷۲.۱ (صفحه). هر صفحه در $\mathbb{R}^3$ مینیمال است، زیرا هر دو انحنا ی اصلی در آن صفرند و لذا $H = 0$.

مثال ۷۳.۱ (هلیکوئید). هلیکوئید مثال کلاسیک رویه‌ای مینیمال است که خمیده اما با $H \equiv 0$ است. محاسبات نشان می‌دهند که فرم‌های بنیادی اول و دوم آن شرط $H = 0$ را ارضا می‌کنند.

مثال ۷۴.۱ (کاتنویذ - اشاره). کاتنویذ سطح چرخشی مینیمالی است که از دوران منحنی زنجیرواره

$$z = \cosh r$$

حول محور مناسب به‌دست می‌آید. این مثال نشان می‌دهد که غیر از صفحه، سطح‌های چرخشی مینیمال غیر بدیهی نیز وجود دارند.

قضیه ۷۵.۱ (شرط مختصاتی مینیمال بودن). اگر S با پارامترسازی $X(u, v)$ و ضرایب فرم‌های بنیادی E, F, G, e, f, g داده شود، شرط مینیمال بودن:

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 0.$$

است. بنابراین معادله

$$eG - 2fF + gE = 0.$$

شرط دیفرانسیلی مینیمال بودن را بیان می‌کند.

۱۷.۱ تمرین‌های جامع انتهای فصل

در این قسمت، تمرین‌ها را بر حسب دشواری با نمادهای ★ (ساده)، ★★ (متوسط) و ★★★ (پیشرفته) مشخص می‌کنیم.

تمرین‌های سطح ★

تمرین ۷۶.۱ (★). پارامترسازی‌های زیر را بررسی کنید و مشخص نمایید در چه نواحی منظم‌اند. در هر حالت، یک نقطه‌ی دلخواه انتخاب کرده و فضای مماس و نرمال واحد را در آن نقطه به‌دست آورید:

۱. صفحه $X(u, v) = (u, v, 1)$ ،

۲. کره واحد در پارامترهای کروی،

۳. مخروط $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$.

تمرین ۷۷.۱ (★). برای استوانه‌ی واحد $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$:

۱. فرم بنیادی اول را به‌دست آورید،

۲. طول منحنی مارپیچ $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \lambda t)$ را روی بازه‌ی $[0, 2\pi]$ محاسبه کنید.

تمرین‌های سطح ★★

تمرین ۷۸.۱ (★★). نشان دهید اگر نگاشت گاوس روی ناحیه‌ی بازی از یک رویه ثابت باشد، آن ناحیه بخشی از یک صفحه است.

تمرین ۷۹.۱ (★★). برای رویه‌ی گرافیک یک تابع هموار $z = f(x, y)$ با پارامترسازی $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ ، نشان دهید:

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2.$$

فرم بنیادی دوم را نیز بر حسب f_{uu}, f_{uv}, f_{vv} بنویسید و فرمول‌های K, H را استخراج کنید.

تمرین‌های سطح ★★★

تمرین ۸۰.۱ (★★★). برای رویه‌ی چرخشی

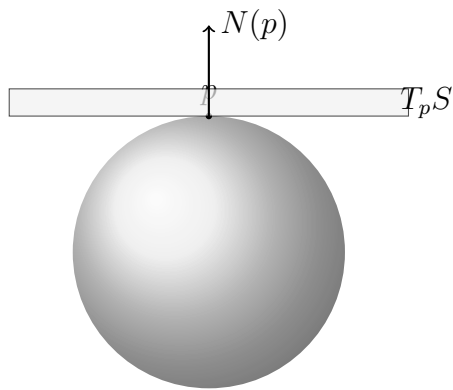
$$X(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, z(u)),$$

۱. فرم بنیادی اول را محاسبه کنید،

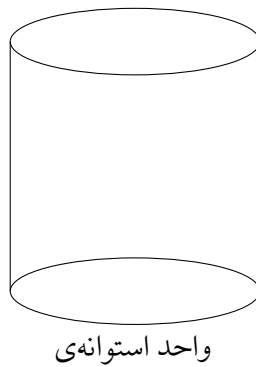
۲. فرم بنیادی دوم را به‌دست آورید،

۳. معادله‌ی دیفرانسیلی تولیدکننده‌ی رویه‌های مینیمال چرخشی (مانند کاتنوید) را از شرط $H = 0$ استخراج کنید.

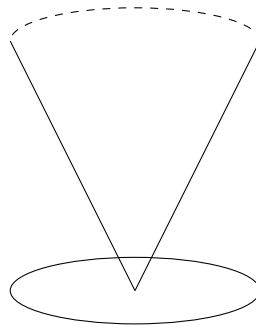
اشکال پیشنهادی برای فصل رویه‌ها



شکل ۱.۱: کره واحد و صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی p به همراه بردار نرمال واحد.



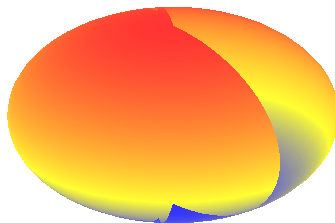
شکل ۲.۱: استوانه‌ی واحد به عنوان مثال کلاسیک رویه‌ی خط‌انداز با $K = 0$.



شکل ۳.۱: مخروط راست به عنوان مثال رویه‌ی خط‌انداز با نقطه‌ی غیرمنتظم در راس.



شکل ۴.۱: هلیکویید: رویه‌ای خط‌انداز و مینیمال در $\mathbb{R}^3$.



شکل ۵.۱: کره به عنوان سطح چرخشی؛ نمونه‌ای کلاسیک برای مطالعه انحناى گاوسی ثابت.

فصل ۲

خم‌ها در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$

مقدمه

در این فصل به مطالعه‌ی خم‌های هموار در $\mathbb{R}^3$ می‌پردازیم. پس از تعریف خم به‌عنوان نگاشتی از بازه‌ای از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^3$ ، مفاهیم طول خم، پارامتر طول قوس، انحنا، فریم فرنه (بردارهای مماس، نرمال اصلی و بینورمال) و پیچش را معرفی می‌کنیم. سپس مثال‌های کلاسیک مانند دایره، مارپیچ دایره‌ای و خم‌های تخت را بررسی می‌کنیم. در انتها، به‌صورت مقدماتی خم‌های روی رویه و ژئودزیک‌ها را (بدون ورود به جزییات اویلر-لاگرانژ) معرفی می‌کنیم تا پیوند طبیعی با فصل رویه‌ها برقرار شود.

۱.۲ خم‌های هموار و منظم

تعریف ۱.۲ (خم در $\mathbb{R}^3$). یک خم (پارامتری) در $\mathbb{R}^3$ نگاشت هموار

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

است که در آن $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه‌ی باز (مثلاً (a, b)) است. بردار $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ برای هر $t \in I$ نقطه‌ای از خم را تعیین می‌کند.

تعریف ۲.۲ (خم هموار و منظم). خم $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ را هموار می‌نامیم اگر α به تعداد کافی مشتق‌پذیر (معمولاً C^k با $k \geq 2$) باشد. خم منظم است اگر در تمام $t \in I$

$$\alpha'(t) \neq 0.$$

نکته ۳.۲. شرط منظم بودن مانع از «ایستادن» خم می‌شود؛ در غیر این صورت جهت حرکت تعریف نشده خواهد بود.

مثال ۴.۲ (خط راست). نگاشت

$$\alpha(t) = p + tv, \quad t \in \mathbb{R}$$

که در آن $p, v \in \mathbb{R}^3$ ثابت و $v \neq 0$ است، خم هموار و منظمی است. مشتق

$$\alpha'(t) = v$$

در همه‌جا ثابت و ناصفر است.

مثال ۵.۲ (دایره‌ی واحد). دایره‌ی واحد در صفحه‌ی xy با پارامتری‌سازی

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in \mathbb{R}$$

یک خم هموار و منظم است؛ مشتق

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

هرگز صفر نمی‌شود.

تعریف ۶.۲ (بازپارامتری‌سازی). اگر $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ و $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ دو خم باشند، می‌گوییم β بازپارامتری‌سازی α است اگر نگاشت هموار، اکیداً صعودی و دیفئومورفی

$$\phi : J \rightarrow I$$

وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\beta(s) = \alpha(\phi(s)).$$

نکته ۷.۲. بازپارامتری‌سازی جهت هندسی خم را تغییر نمی‌دهد، بلکه فقط سرعت طی کردن مسیر را عوض می‌کند.

۱.۱.۲ خم‌های صفحه‌ای و کاربردهای ساده

مثال ۸.۲ (خم به‌صورت گراف پارامتری). خم

$$\alpha(t) = (t, f(t), 0)$$

در صفحه‌ی xz یا xy قرار دارد. این نوع خم‌ها در رسم نمودار توابع و در تحلیل منحنی‌های پاسخ سیستم‌ها به کار می‌روند.

مثال ۹.۲ (پاره‌خم‌های چندجمله‌ای (splines ساده)). در کاربردهای عملی، خم‌ها اغلب به صورت وصله‌ای از چندجمله‌ای‌ها تعریف می‌شوند. مثلاً

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, t^2, 0) & 0 \leq t \leq 1, \\ (1 + (t-1), 1 + (t-1), 0) & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

این خم در $t = 1$ پیوسته است، ولی مشتق آن جهشی دارد؛ لذا هموار نیست.

نکته ۱۰.۲. در طراحی منحنی‌های هموار (مثلاً در گرافیک کامپیوتری)، از اسپلاین‌های مکعبی استفاده می‌شود که پیوستگی تا مشتق دوم را تضمین می‌کنند. مطالعه‌ی هندسه‌ی این خم‌ها نیازمند تعریف دقیق‌تر همواری و منظم بودن در نقاط اتصال است.

۲.۲ طول خم و پارامتر طول قوس

تعریف ۱۱.۲ (طول خم). اگر $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ خم منظمی باشد، طول آن روی بازه‌ی $[a, b]$ به صورت

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

تعریف می‌شود.

گزاره ۱۲.۲ (ناقص بودن طول خم برای بازپارامتری سازی ها). اگر β بازپارامتری سازی همواری از خم منظم α باشد، آنگاه طول هندسی خم ثابت می ماند. یعنی برای هر بازه متناظر،

$$L(\alpha|_{[t_1, t_2]}) = L(\beta|_{[s_1, s_2]}),$$

مشروط بر اینکه $\phi(s_1) = t_1$ و $\phi(s_2) = t_2$.

اثبات. اگر $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ ، مشتق

$$\beta'(s) = \alpha'(\phi(s)) \phi'(s).$$

پس

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(\phi(s))\| \phi'(s),$$

□

و با تغییر متغیر $t = \phi(s)$ نتیجه حاصل می شود.

تعریف ۱۳.۲ (پارامتر طول قوس). خم منظم $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید و $t \in I$ ثابت باشد. تابع

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$$

طول قوس از t_0 تا t نامیده می شود. اگر $\|\alpha'(t)\| > 0$ ، آنگاه s تابعی اکیداً صعودی است و می توان t را به صورت تابعی از s نوشت، یعنی $t = t(s)$. خم جدید

$$\gamma(s) = \alpha(t(s))$$

را بازپارامتری سازی خم با پارامتر طول قوس می نامیم.

گزاره ۱۴.۲. اگر $\gamma(s)$ خم منظمی باشد که با پارامتر طول قوس پارامتر سازی شده است، آنگاه برای همه s داریم

$$\|\gamma'(s)\| = 1.$$

اثبات. از تعریف $s(t)$ ، به ازای هر t ،

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|.$$

اگر $\gamma(s) = \alpha(t(s))$ ، مشتق زنجیره ای می دهد:

$$\gamma'(s) = \alpha'(t(s)) \frac{dt}{ds}.$$

از آنجا که $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|$ ،

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|},$$

و لذا

$$\|\gamma'(s)\| = \|\alpha'(t(s))\| \frac{1}{\|\alpha'(t(s))\|} = 1.$$

□

نکته ۱۵.۲. پارامتر طول قوس طبیعی ترین پارامتر روی خم است؛ بسیاری از فرمول های هندسی (به ویژه برای انحنا و پیچش) در این پارامتر ساده تر می شوند.

تمرین‌های تکمیلی طول خم

تمرین ۱۶.۲ (★). طول خم

$$\alpha(t) = (t, t^2, 0)$$

را روی بازه‌ی $[0, 1]$ محاسبه کنید. (راهنما: از انتگرال $\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt$ استفاده کنید.)تمرین ۱۷.۲ (★★). نشان دهید اگر $\gamma(s)$ با پارامتر طول قوس داده شده باشد، آنگاه برای هر بازه‌ی $[s_1, s_2]$ داریم

$$L(\gamma|_{[s_1, s_2]}) = s_2 - s_1.$$

تمرین ۱۸.۲ (★★★). خم

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 0)$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید بازپارامتری‌سازی با طول قوس به صورت بسته قابل بیان نیست، ولی می‌توانید معادله‌ی دیفرانسیلی $s(t)$ را نوشته و خواص کیفی آن را بررسی کنید.

۳.۲ بردار مماس، انحنا و بردار نرمال اصلی

در این بخش فرض می‌کنیم خم با پارامتر طول قوس s داده شده است:

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma = \gamma(s), \quad \|\gamma'(s)\| = 1.$$

تعریف ۱۹.۲ (بردار مماس واحد). بردار مماس واحد خم γ در s به صورت

$$\mathbf{T}(s) = \gamma'(s)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲۰.۲ (انحنا). انحناى خم در s با

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$$

تعریف می‌شود. اگر $\kappa(s) > 0$ باشد، جهت خم شدن خم را نشان می‌دهد.تعریف ۲۱.۲ (بردار نرمال اصلی). اگر $\kappa(s) > 0$ ، بردار

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)}$$

بردار نرمال اصلی خم در s است.نکته ۲۲.۲. بردار $\mathbf{T}(s)$ واحد است، بنابراین $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 1$ و

$$\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 0.$$

در نتیجه $\mathbf{T}'(s)$ بر $\mathbf{T}(s)$ عمود است؛ یعنی تغییر جهت مماس همیشه در جهت نرمال اصلی رخ می‌دهد.

مثال ۲۳.۲ (دایره‌ی واحد). خم

$$\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0)$$

با پارامتر طول قوس داده شده است (چون $\|\gamma'(s)\| = 1$). داریم

$$\mathbf{T}(s) = \gamma'(s) = (-\sin s, \cos s, 0),$$

$$\mathbf{T}'(s) = (-\cos s, -\sin s, 0).$$

پس

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = 1,$$

و

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s) = (-\cos s, -\sin s, 0).$$

در این مثال انحنا ثابت و برابر با ۱ است.

مثال ۲۴.۲ (خط راست). برای خم

$$\gamma(s) = p + sv, \quad \|v\| = 1,$$

داریم

$$\mathbf{T}(s) = v, \quad \mathbf{T}'(s) = 0,$$

پس

$$\kappa(s) = 0.$$

بنابراین خط راست خم بدون انحنای هندسی است.

گزاره ۲۵.۲ (فرمول انحنا برای پارامتر عمومی). اگر خم $\alpha(t)$ با پارامتر عمومی t داده شده باشد و $\alpha'(t) \neq 0$ ، آنگاه انحنا در t به صورت

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

قابل محاسبه است.

اثبات. ایده‌ی اثبات مبتنی بر بازپارامتری‌سازی با طول قوس و استفاده از رابطه‌ی بین مشتقات نسبت به t و s است؛ این فرمول با اعمال قانون زنجیره‌ای و خواص ضرب خارجی به دست می‌آید. $\square$

تمرین‌های تکمیلی انحنا

تمرین ۲۶.۲ (★). برای خم

$$\alpha(t) = (t, t^2, 0)$$

انحنا را بر حسب t با استفاده از فرمول

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

محاسبه کنید.

تمرین ۲۷.۲ (★★). نشان دهید اگر $\kappa(t) \equiv 0$ باشد، آنگاه خم در یک خط راست قرار می‌گیرد. (راهنما: از این واقعیت استفاده کنید که $T'(s) = 0$ در پارامتر طول قوس.)

تمرین ۲۸.۲ (★★★). خم

$$\alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t, 0)$$

را در نظر بگیرید که یک آستروئید صفحه‌ای است.

۱. نشان دهید خم منظم است (به جز در پارامترهایی که دقت نیاز دارد).

۲. انحنا را بر حسب t محاسبه و رفتار آن را در نزدیکی گوشه‌ها تحلیل کنید.

۴.۲ فریم فرنه و پیچش

برای توصیف دقیق‌تر رفتار موضعی خم در فضا، علاوه بر مماس و نرمال اصلی، به جهت سوم یعنی «خروج از صفحه‌ی نوسان» نیاز داریم.

در این بخش فرض می‌کنیم خم با پارامتر طول قوس داده شده است و $\kappa(s) > 0$ روی بازه‌ی مورد نظر.

تعریف ۲۹.۲ (بردار بینورمال). بردار بینورمال خم در s :

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

گزاره ۳۰.۲. برای هر s ، مجموعه‌ی

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

یک پایه‌ی متعامد-واحد (اورنون) برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهد.

تعریف ۳۱.۲ (پیچش). اگر $B'(s)$ وجود داشته باشد، پیچش خم در s مقدار حقیقی $\tau(s)$ است که از معادله

$$B'(s) = -\tau(s) N(s)$$

به دست می‌آید.

قضیه ۳۲.۲ (معادلات فرنه-سره). برای خم منظم $\gamma(s)$ با $\kappa(s) > 0$ و فریم فرنه T, N, B داریم:

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s) N(s), \\ N'(s) = -\kappa(s) T(s) + \tau(s) B(s), \\ B'(s) = -\tau(s) N(s). \end{cases}$$

نکته ۳۳.۲. دو تابع $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ اطلاعات هندسی موضعی خم را به طور کامل تعیین می‌کنند؛ به طور دقیق‌تر، قضیه‌ی بنیادی خم‌ها بیان می‌کند که با دانستن κ, τ و شرایط اولیه، خم تا حرکت صلب یکتا است.

قضیه ۳۴.۲ (قضیه‌ی بنیادی خم‌های فضایی). گویی توابع هموار $\kappa(s) > 0$ و $\tau(s)$ روی بازه‌ی I داده شده باشند. آنگاه:

(الف) وجود: خم هموار و منظمی $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ وجود دارد که انحنا κ و پیچش آن τ است.

(ب) یکتایی تا حرکت صلب: اگر γ_1 و γ_2 دو خم با انحنا و پیچش‌های یکسان باشند، آنگاه یک حرکت صلب $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ وجود دارد به طوری که

$$\gamma_2 = A \circ \gamma_1.$$

۵.۲ مثال‌های کلاسیک

۱.۵.۲ دایره‌ی شعاع R

مثال ۳۵.۲. دایره‌ی شعاع $R > 0$ در صفحه‌ی xy را در نظر بگیرید:

$$\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

ابتدا

$$\alpha'(t) = (-R \sin t, R \cos t, 0), \quad \alpha''(t) = (-R \cos t, -R \sin t, 0).$$

داریم

$$\|\alpha'(t)\| = R, \quad \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = R^2.$$

پس

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

انحنای ثابت و برابر با $1/R$ است. می‌توان نشان داد پیچش τ صفر است؛ یعنی خم تخت است.

۲.۵.۲ مارپیچ دایره‌ای

مثال ۳۶.۲ (مارپیچ دایره‌ای). خم

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a > 0, b \neq 0,$$

یک مارپیچ دایره‌ای است. محاسبات نشان می‌دهند

$$\kappa(t) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau(t) = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

که هر دو ثابت‌اند. بنابراین مارپیچ دایره‌ای خم فضایی با انحنا و پیچش ثابت است.

۳.۵.۲ خم‌های تخت

تعریف ۳۷.۲ (خم تخت). خم γ را تخت می‌گوییم اگر تمام تصویر آن در یک صفحه‌ی اقلیدسی (مثلاً صفحه‌ی $ax + by + cz = d$) قرار گیرد. معادلاً، پیچش آن در همه‌جا صفر است: $\tau \equiv 0$.

گزاره ۳۸.۲. اگر خم منظم γ دارای پیچش $\tau \equiv 0$ باشد، آنگاه تصویر خم در یک صفحه قرار می‌گیرد.

۶.۲ خم‌ها روی رویه‌ها و ژئودزیک‌ها (مقدماتی)

در این بخش ارتباط بین خم‌های فضایی و رویه‌ها را به‌طور مقدماتی مطرح می‌کنیم.

تعریف ۳۹.۲ (خم روی رویه). اگر $S \subset \mathbb{R}^3$ رویه‌ای منظم باشد، یک خم

$$\gamma : I \rightarrow S$$

که بردارش در $\mathbb{R}^3$ مقادیرش در S قرار دارند، خم روی رویه نامیده می‌شود. یعنی شرط $\gamma(I) \subset S$ برقرار است.

تعریف ۴۰.۲ (بردار مماس به رویه). اگر $\gamma : I \rightarrow S$ هموار باشد، برای هر s داریم

$$\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)}S.$$

یعنی بردار مماس خم در هر نقطه رویه، در صفحه‌ی مماس رویه در آن نقطه قرار دارد.

یکی از کلاس‌های مهم خم‌ها روی یک رویه، ژئودزیک‌ها هستند که به‌طور شهودی شبیه «خطوط راست» رویه‌اند.

تعریف ۴۱.۲ (ژئودزیک - بیان شهودی). خم هموار

$$\gamma : I \rightarrow S$$

را ژئودزیک می‌نامیم اگر به‌طور محلی طول مسیر بین نقاط نزدیک را کمینه کند. به عبارت دیگر، بین دو نقطه‌ی بسیار نزدیک روی S ، ژئودزیک کوتاه‌ترین خم (در معنای موضعی) است.

مثال ۴۲.۲ (ژئودزیک‌ها روی کره). روی کره‌ی واحد، ژئودزیک‌ها دقیقاً تقاطع کره با صفحات عبوری از مبدأ هستند؛ این منحنی‌ها را دایره‌های عظیمه می‌نامند. برای مثال، خط استوا و نصف‌النهارها ژئودزیک‌اند.

نکته ۴۳.۲ (ارتباط با فصل رویه‌ها). در چارچوب کامل‌تر هندسه‌ی دیفرانسیل، ژئودزیک‌ها به‌عنوان خم‌هایی تعریف می‌شوند که شتاب آن‌ها همیشه در راستای نرمال رویه باشد، یعنی شتاب نسبت به متریک صفر است. این دیدگاه با استفاده از فرم بنیادی اول و معادلات اوایلر-لاگرانژ حاصل می‌شود، که فراتر از سطح این فصل است.

۱.۶.۲ ژئودزیک‌ها روی استوانه: مثال محاسباتی ساده

استوانه‌ی واحد با پارامترسازی

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

را در نظر بگیرید. فرم بنیادی اول

$$I = du^2 + dv^2$$

است، بنابراین متریک روی استوانه همان متریک اقلیدسی در (u, v) است.

نکته ۴۴.۲. چون متریک در (u, v) ثابت است، «خطوط راست» در صفحه‌ی پارامتر (u, v) باید ژئودزیک‌های استوانه باشند.

مثال ۴۵.۲ (ژئودزیک‌های استوانه). خطوط راست در صفحه‌ی (u, v) به صورت

$$u(t) = at + u_., \quad v(t) = bt + v.$$

هستند. تصویر این خطوط روی استوانه خم‌هایی با شکل

$$\gamma(t) = X(u(t), v(t)) = (\cos(at + u_.), \sin(at + u_.), bt + v.)$$

است که مارپیچ‌هایی روی استوانه‌اند. این مارپیچ‌ها ژئودزیک‌های استوانه‌اند.

تمرین ۴۶.۲ (★★). نشان دهید اگر خم

$$\gamma(t) = X(u(t), v(t))$$

روی استوانه‌ی واحد ژئودزیک باشد، آنگاه $u(t)$ و $v(t)$ باید خطی در t باشند.

۷.۲ تمرین‌های جامع انتهای فصل

در ادامه تمرین‌ها را بر حسب دشواری طبقه‌بندی می‌کنیم.

تمرین‌های سطح ★

تمرین ۴۷.۲ (★). برای خم‌های زیر تعیین کنید آیا منظم‌اند یا خیر. در صورت منظم بودن، طول خم روی بازه‌ی داده‌شده را محاسبه کنید:

$$۱. \alpha(t) = (t^2, t^3, 0) \text{ روی } [0, 1],$$

$$۲. \alpha(t) = (\cos t, \sin t, t) \text{ روی } [0, 2\pi].$$

تمرین ۴۸.۲ (★). برای دایره‌ی شعاع R ,

$$\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t, 0),$$

نشان دهید پارامتر طول قوس s با t به صورت

$$s = Rt$$

مرتبط است و پارامترسازی با طول قوس را بنویسید.

تمرین‌های سطح ★★

تمرین ۴۹.۲ (★★). برای خم

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

انحنای و پیچش را با استفاده از فرمول‌های برداری

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

محاسبه کنید و ثابت بودن آن‌ها را نشان دهید.

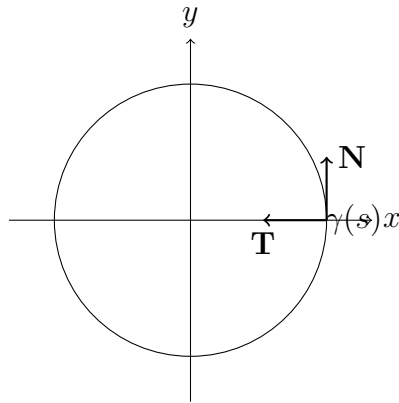
تمرین ۵۰.۲ (★★). نشان دهید اگر خم هموار $\gamma(s)$ (با پارامتر طول قوس) در صفحه‌ای ثابت قرار داشته باشد، آنگاه پیچش آن $\tau(s)$ در همه جا صفر است.

تمرین‌های سطح ★★★

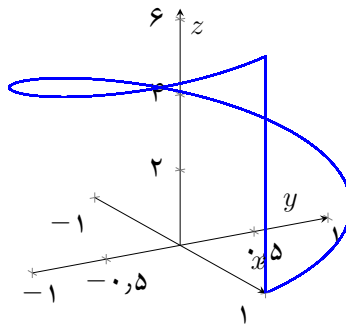
تمرین ۵۱.۲ (★★★). فرض کنید خم $\gamma(s)$ با پارامتر طول قوس داده شده و $\kappa(s) > 0$ و $\tau(s)$ انحنا و پیچش آن باشند. نشان دهید اگر κ و τ ثابت باشند، آنگاه خم تا حرکت صلب یک مارپیچ دایره‌ای است. (راهنما: معادلات فرنه-سره را حل کنید.)

تمرین ۵۲.۲ (★★★). یک خم روی کره‌ی واحد را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر این خم ژئودزیک (در معنای موضعاً کوتاه‌ترین مسیر) باشد، آنگاه باید دایره‌ی عظیمه باشد. (به صورت کیفی استدلال کنید.)

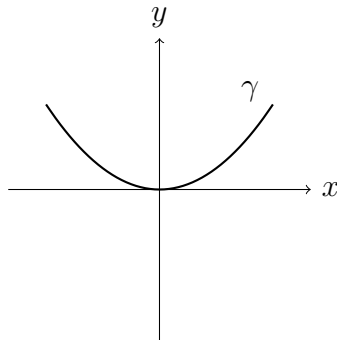
اشکال پیشنهادی برای فصل خم‌ها



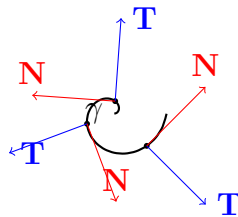
شکل ۱.۲: دایره و نمایش بردارهای مماس و نرمال اصلی در یک نقطه.



شکل ۲.۲: مارپیچ دایره‌ای به‌عنوان خم فضایی با انحنا و پیچش ثابت.



شکل ۳.۲: خم تخت در یک صفحه؛ پیچش در همه جا صفر است.



شکل ۴.۲: نمایش شماتیک فریم فرنه روی یک خم فضایی (طرح دوبعدی برای سادگی).